Erläuterungen zur höchst eleganten Methode, welche der illustre Lagrange beim Integrieren der Differentialgleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ verwendet hat *

Leonhard Euler

§1 Nachdem ich lange und tief in der Erforschung der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

versunken gewesen war und vergebens nach einer *direkten* Methode, die auf leichtem und klarem Weg zu ihrem Integral führen würde, gesucht hatte, war ich völlig erstaunt, als mir mitgeteilt wurde, dass in Band 4 der Miscellaneorum Taurinsium vom illustren Lagrange eine solche Methode vorgestellt worden ist, mit deren Hilfe für den Fall, in dem

$$X = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4$$

und

$$Y = A + By + Cyy + Dy^3 + Ey^4$$

*Ursprünglicher Titel: "Dilucidationes super methodo elegantissima, qua illustris de la Grange usus est in integranda aequatione differentiali $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ ", zuerst publiziert in: *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1778: I* (1780, verfasst 1777): pp. 20–57, Nachdruck in: Opera Omnia: Series 1, Volume 21, pp. 1 – 38, Eneström-Nummer E506, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

ist, er das algebraische und sogar vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung mit glücklichstem Erfolg gefunden hat

$$\frac{\sqrt{X}+\sqrt{Y}}{x-y} = \sqrt{\Delta + D(x+y) + E(x+y)^2},$$

wo Δ eine beliebige durch Integration eingegangene Größe bezeichnet.

§2 Ich habe aber diesen außerordentlichen Fund umso mehr bewundert, weil ich immer geglaubt hatte, dass eine solche Methode im Auffinden eines geeigneten Faktors, mit welchen die vorgelegte Gleichung integrierbar gemacht werden würde, gesucht werden muss, weil für gewöhnlich jede Integrationsmethode entweder in der Trennung der Variablen oder in einem geeigneten Multiplikator enthalten zu sein scheint, obwohl in gewissen Fällen auch die Differentiation zum Integral führen kann, wie so von mir wie von anderen mit zahlreichen Beispielen gezeigt worden ist. Aber diese LAGRANGE'sche Methode scheint mit Recht zu einer dritten Gattung zu rechnen zu sein.

§3 Obwohl es aber leicht ist Funden einiges hinzuzufügen, wird es dennoch bei diesem so wesentlichen Gegenstand besonders förderlich sein, die vom illustren LAGRANGE angewandte Methode genauer betrachtet zu haben und mehr an den Gebrauch in der Analysis angepasst zu haben; denn die ganze Aufgabe scheint um vieles leichter und einfacher erledigt werden zu können; deshalb werde was ich über diesen Gegenstand, welcher mit Recht als von größter Bedeutung anzusehen ist, erdacht habe, hier genauer darstellen.

§4 Weil aber dieses vom illustren LAGRANGE gefundene Integral von den Formen, welche ich selbst einst angegeben hatte, sehr stark abweicht und ihnen in Bezug auf die Schwierigkeit nicht unwesentlich voransteht, ist es vor allen ratsam, dass in Erfahrung gebracht wird, wie der Differentialgleichung Genüge geleistet wird. Zu diesem Zweck setze ich der Kürze wegen $\sqrt{X}+\sqrt{Y}=V$, dass ich

$$\frac{V}{x-y} = \sqrt{\Delta + D(x+y) + E(x+y)^2}$$

habe, welche Gleichung so differenziert werden muss, dass die beliebige Konstante Δ aus dem Differential herausgeht. Nach Quadrieren wird also

$$\frac{V^2}{(x-y)^2} = \Delta + D(x+y) + E(x+y)^2$$

sein, welche differenziert

$$\frac{2VdV}{(x-y)^2} - \frac{2VV(dx-dy)}{(x-y)^3} - D(dx+dy) - 2E(x+y)(dx+dy) = 0$$

gibt.

§5 Damit nun die Rechnung klarer wird, wollen wir die mit dx und dy behafteten Anteile getrennt untersuchen. Für das Element dx, wenn y als eine Konstante betrachtet wird, wird also

$$dV = \frac{X'dx}{2\sqrt{X}}$$

sein, woher sich die einzelnen Anteile so verhalten werden

$$dx\left(\frac{VX'}{(x-y)^2\sqrt{X}} - \frac{2VV}{(x-y)^3} - D - 2E(x+y)\right),$$

wo man bemerke, dass $V = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$ ist und daher

$$VV\sqrt{X} = (X+Y)\sqrt{X} + 2X\sqrt{Y},$$

woher hier zwei Arten an Termen auftreten, die einen mit $\sqrt{X}$, die anderen mit $\sqrt{Y}$ multipliziert. Es sind aber zwei mit $\sqrt{Y}$ behaftete Terme vorhanden, welche

$$-\frac{4X\sqrt{Y}}{(x-y)^3} + \frac{X'\sqrt{Y}}{(x-y)^2}$$

sind, welche also zusammengenommen

$$\frac{\sqrt{Y}}{(x-y)^3}(X'(x-y) - 4X)$$

geben werden, welche Form wegen

$$X = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4$$

und daher

$$X' = B + 2Cx + 3Dxx + 4Ex^3$$

dann

$$X'(x-y) - 4X = -4A - B(3x+y) - 2C(xx+xy) - D(x^3+3xxy) - 4Ex^3y$$

geben wird. Aber die mit $\sqrt{X}$ behafteten Terme sind

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-y)^3}(X'(x-y) - 2(X+Y) - D(x-y)^3 - 3E(x+y)(x-y)^3).$$

Weil also

$$X + Y = 2A + B(x+y) + C(x^2+y^2) + D(x^3+y^3) + E(x^4+y^4)$$

ist, wird nach der Substitution dieser letzte Faktor

$$-4A - B(x+3y) - 2C(xy+yy) - D(3xxy+y^3) - 4Exy^3$$

sein, welche Form von der vorhergehenden nur darin abweicht, dass die Buchstaben x und y vertauscht sind.

§6 Wenn wir also der Kürze wegen festlegen

$$\begin{aligned} M &= 4A + B(3x+y) + 2C(xx+xy) + D(x^3+3xxy) + 4Ex^3y, \\ N &= 4A + B(x+3y) + 2C(yy+xy) + D(y^3+3xyy) + 4Exy^3, \end{aligned}$$

wird daher der mit dem Element dx multiplizierte Teil so ausgedrückt sein

$$-\frac{dx}{(x-y)^3\sqrt{X}}(M\sqrt{Y} + N\sqrt{X}).$$

§7 In gleicher Weise werden wegen

$$dV = \frac{Y'dy}{2\sqrt{Y}}$$

die mit dem Element dy multiplizierten Teile

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}}\left(\frac{VY'}{(x-y)^2} + \frac{2VV\sqrt{Y}}{(x-y)^3} - D\sqrt{Y} - 2E(x+y)\sqrt{Y}\right)$$

sein. Nun wird die Form wegen

$$V = \sqrt{X} + \sqrt{Y} \quad \text{und} \quad VV\sqrt{Y} = (X+Y)\sqrt{Y} + 2Y\sqrt{X}$$

die folgenden mit $\sqrt{X}$ multiplizierten Terme enthalten

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-y)^3}(Y'(x-y) + 4Y),$$

welche Form aus der ersten der vorgehenden Rechnung entspringt, wenn die Buchstaben x und y und gleichzeitig die Vorzeichen vertauscht werden; daher ist klar, dass dieser Ausdruck den Wert $+N$ liefert. Aber die übrigen mit $\sqrt{Y}$ behafteten Terme werden

$$\frac{\sqrt{Y}}{(x-y)^3}(Y'(x-y) + 2(X+Y) - D(x-y)^3 - 2E(x+y)(x-y)^3)$$

sein. Diese Form entspringt wiederum aus der Vertauschung der Buchstaben und der Vorzeichen aus der Form der vorgehenden Rechnung; während diese $-N$ war, wird diese neue also $+M$ sein. Auf diese Weise werden also die das Element dy enthaltenden Anteile

$$+\frac{dy}{(x-y)^3\sqrt{Y}}(N\sqrt{X} + M\sqrt{Y})$$

sein.

§8 Indem man also diese Glieder zusammenführt, wird die aus der LAGRANGE'schen Form entspringende Differentialgleichung

$$\left(\frac{dy}{\sqrt{Y}} - \frac{dx}{\sqrt{X}}\right)\frac{N\sqrt{X} + M\sqrt{Y}}{(x-y)^3} = 0$$

sein, welche durch den gemeinsamen Faktor geteilt die vorgelegte Differentialgleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ selbst liefert; daher ist zugleich klar, dass die dargebotene Integralgleichung sich richtig verhält und sogar der Wert des Buchstabens Δ vollkommen unserem Belieben überlassen ist.

§9 Bevor wir aber die LAGRANGE'sche Methode auf die in voller Allgemeinheit aufgefasste Differentialgleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ annehmen, wollen wir mit einem einfacheren Fall anfangen, in dem diese rationale Gleichung vorgelegt wird

$$\frac{dx}{a+2bx+cxx} = \frac{dy}{a+2by+cyy}.$$

ANALYSIS
FÜR DIE INTEGRATION DER DIFFERENTIALGLEICHUNG

$$\frac{dx}{a+2bx+cxx} = \frac{dy}{a+2by+cyy}$$

§10 Wir wollen der Kürze wegen

$$a+2bx+cxx = X$$

und

$$a+2by+cyy = Y$$

setzen, dass

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

werden muss; weil diese Formeln einander gleich sein müssen, bezeichne man jede der beiden mit dem Element dt, so dass wir diese zwei Formeln erhalten

$$\frac{dx}{dt} = X \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = Y.$$

Wenn wir also nun $x - y = q$ setzen, wird

$$\frac{dq}{dt} = X - Y = 2bq + cq(x+y)$$

sein, woher durch Teilen durch q

$$\frac{dq}{qdt} = 2b + c(x+y)$$

sein wird.

§11 Nun wollen wir die ersten Formeln für konstant gehaltenes Element dt differenzieren und nach Setzen von

$$dX = X'dx \quad \text{und} \quad dY = Y'dx$$

werden diese zwei Gleichungen entspringen

$$\frac{ddx}{dxdt} = X' \quad \text{und} \quad \frac{ddy}{dydt} = Y'$$

welche zueinander addiert

$$\frac{ddx}{dxdt} + \frac{ddy}{dydt} = X' + Y'$$

liefern. Daher, weil

$$X' = 2b + 2cx \quad \text{und} \quad Y' = 2b + 2cy$$

ist, wird

$$\frac{1}{dt}\left(\frac{ddx}{dx} + \frac{ddy}{dy}\right) = 4b + 2c(x+y)$$

sein.

§12 Weil ja also dieser letzte Wert doppelt so groß ist wie der vorhergehende $\frac{dq}{qdt}$, sind wir auf diese Weise zu dieser Gleichung

$$\frac{ddx}{dx} + \frac{ddy}{dy} = \frac{2dq}{q}$$

geführt worden, welche integriert $\log dx + \log dy = 2\log q + \text{Konst.}$ gibt, und in Zahlen wird

$$dxdy = Cqqdt^2$$

sein, sodass

$$C = \frac{dxdy}{qqdt^2}$$

sein. Daher, weil

$$\frac{dx}{dt} = X \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = Y$$

ist, wird die Integralgleichung

$$\frac{XY}{(x-y)^2} = C$$

sein, welche also nicht nur algebraisch ist, sondern auch vollständig.

§13 Wenn also diese Differenzialgleichung vorgelegt war

$$\frac{dx}{a+2bx+cxx} = \frac{dy}{a+2by+cyy},$$

wird ihr vollständiges Integral so ausgedrückt sein

$$\frac{(a+2bx+cxx)(a+2by+cyy)}{(x-y)^2} = C,$$

welche, indem man auf beiden Seiten $bb-ac$ addiert, diese Form annehmen wird

$$\frac{aa+2ab(x+y)+2acxy+bb(x+y)^2+bb(x+y)^2+2bcxy(x+y)+ccxxyy}{(x-y)^2} = \Delta\Delta,$$

und so wird nach Ziehen der Wurzel das Integral diese Form haben

$$\frac{a+b(x+y)+cxy}{x-y} = \Delta,$$

welche ohne Zweifel die einfachste ist, weil ja so y durch x wie x durch y sehr einfach ausgedrückt werden kann, weil

$$y = \frac{(\Delta - b)x - a}{\Delta + b + cx} \quad \text{und} \quad x = \frac{a + (\Delta + b)y}{\Delta - b - cy}$$

ist.

§14 Dem, der der Kalkül, das wir hier gebraucht haben, betrachtet, wird leicht klar werden, dass sich in diesen Formen X und Y nicht weiter als das Quadrat fortschreiten lässt. Wenn wir nämlich X zusätzlich den Term dx^3 und Y den Term dy^3 zuteilen, geht für die erste Form

$$\frac{X - Y}{x - y} = 2b + c(x + y) + d(xx + xy + yy) = \frac{dq}{qdt}$$

hervor, für die andere Form ist aber

$$X' + Y' = 4b + 2c(x + y) + 3d(xx + yy) = \frac{ddx}{dxdt} + \frac{ddy}{dydt}.$$

Daher, wenn wir das Doppelte der vorhergehenden wegnehmen, berechnet man

$$\frac{ddx}{dxdt} + \frac{ddy}{dydt} - \frac{2dq}{qdt} = d(x - y)^2,$$

welche Gleichung sich nicht weiter integrieren lässt.

§15 Es kann aber leicht gezeigt werden, dass eine solche Differentialgleichung, in welcher über das Quadrat hinausgegangen wird, in keiner Weise weiter algebraisch integriert werden kann. Wenn nämlich nur dieser Fall $\frac{dx}{1+x^3} = \frac{dy}{1+y^3}$ vorgelegt werden würde, ist bekannt, dass jedes der beiden Integrale teils Logarithmen teils Kreisbogen involviert und daher verschiedene transzendente Größen beinhaltet, die auf keine Weise miteinander verglichen Werten können. Natürlich können Vergleiche dieser Art nur in den Fällen Geltung haben, in denen auf jeder der beiden Seiten nur transzendente Größen einer einzigen Art auftauchen.

ANALYSIS
FÜR DIE INTEGRATION DER GLEICHUNG

$$\frac{dx}{a + 2bx + cxx} + \frac{dy}{a + 2by + cyy} = 0$$

§16 Wenn wir also hier wie zuvor

$$\frac{dx}{a + 2bx + cxx} = dt$$

setzen, wird

$$\frac{dy}{a + 2by + cyy} = -dt$$

gesetzt werden müssen; aber wenn wir die Rechnung in gleicher Weise wie zuvor durchführen wollen, erreichen wir überhaupt nichts. Nachdem ich aber alle Schwierigkeiten gründlich betrachtet hatte, bin ich schließlich auf einen Kunstgriff gestoßen, mit welchem sich dieser Fall erledigen ließ, sodass ich daher glaube, einen nicht zu verachtenden Fortschritt der LAGRANGE'schen Methode beigetragen zu haben.

§17 Weil ich ja also diese zwei Gleichungen habe

$$\frac{dx}{dt} = X \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = -Y,$$

bilde ich daraus diese neue Gleichung

$$\frac{ydx + xdy}{dt} = yX - xY.$$

Nun setze ich $xy = u$, dass ich

$$\frac{du}{dt} = a(y - x) + cxy(x - y)$$

habe, woher nach Setzen $x - y = q$ $\frac{du}{dt} = q(cu - a)$ sein wird, welche Gleichung durch $cu - a$ geteilt und mit c multipliziert

$$\frac{cdu}{dt(cu - a)} = cq$$

liefert, und auf diese Weise haben wir ein logarithmisches Differential erhalten.

§18 Weiter wollen wir aber die anfänglichen Gleichungen wie zuvor differenzieren und werden

$$\frac{ddx}{dtdx} = X' \quad \text{und} \quad \frac{ddy}{dtdy} = -Y'$$

erhalten, welche zueinander addiert

$$\frac{1}{dt}\left(\frac{ddx}{dx}+\frac{ddy}{dy}\right)=X'-Y'=2cq$$

geben; wenn wir also davon das Doppelte der vorhergehenden Gleichung abziehen, wird

$$\frac{1}{dt}\left(\frac{ddx}{dx}+\frac{ddy}{dy}-\frac{2cdu}{cu-a}\right)=0$$

zurückbleiben, woher wir durch Multiplizieren mit dt und Integrieren $\log x + \log y - 2\log(cu-a) = \log C$ und daher $\frac{dxdy}{(cu-a)^2} = Cdt^2$. Weil also $dx = Xdt$ und $dy = -Ydt$ ist, wird unsere Integralgleichung $-\frac{XY}{(cu-a)^2} = C$ sein.

§19 Durch diese Analysis sind wir also zu dieser Integralgleichung der vorgelegten Gleichung geführt werden

$$\frac{(a+2bx+cxx)(a+2by+cyy)}{(a-cxy)^2}=C,$$

welche Gleichung, wenn auf beiden Seiten die Einheit subtrahiert wird, auf diese Form reduziert wird

$$\frac{2ab(x+y)+ac(x+y)^2+4bbxy+2bcxy(x+y)}{(a-cxy)^2}=C.$$

§20 Wir wollen diese Integration an einem Beispiel illustrieren, indem wir $a=1$, $b=0$ und $c=1$ setzen, sodass diese Differentialgleichung vorgelegt ist

$$\frac{dx}{1+xx}+\frac{dy}{1+yy}=0,$$

deren Integral wir wissen $\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy} = C$ zu sein; und so wissen wir, dass $\frac{x+y}{1-xy} = C$ ist. Aber unsere letzte Formel gibt für diesen Fall

$$\frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}=C \quad \text{und daher} \quad \frac{x+y}{1-xy}=C,$$

was hervorragend übereinstimmt.

§21 Wir wollen auch den Fall betrachten, in dem $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ und $c = 1$ ist, so dass diese Gleichung vorgelegt wird

$$\frac{dx}{1+x+xx} + \frac{dy}{1+y+yy} = 0,$$

deren Integral

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x\sqrt{3}}{2+x} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{y\sqrt{3}}{2+y} = C$$

ist, woher folgt, dass

$$\arctan \frac{2(x+y+xy)\sqrt{3}}{4+2(x+y)-2xy} = C$$

und daher auch $\frac{x+y+xy}{2+x+y-xy} = C$ sein wird. Aber die gefundene Form des Integrals wird für diesen Fall

$$\frac{x+y+(x+y)^2+xy+xy(x+y)}{(1-xy)^2} = C$$

geben, welche in Faktoren aufgelöst

$$\frac{(1+x+y)(x+y+xy)}{(1-xy)^2} = C$$

gibt. Aber die erste Gleichung $\frac{x+y+xy}{2+x+y-xy} = C$ liefert invertiert $\frac{2+x+y-xy}{x+y+xy} = C$ und nach Abziehen der Einheit $\frac{1+x+y}{1-xy} = C$.

§22 Wir wollen also sehen, ob diese letzten Gleichungen einander entsprechen, und weil die Konstanten sich unterscheiden können, wollen wir die beiden Gleichungen so darstellen

$$\frac{1-xy}{x+y+xy} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{1+x+y}{1-xy} = \beta;$$

daher, weil $\frac{1}{\alpha} = \frac{x+y+xy}{1-xy}$ ist, ist es ersichtlich, dass $\beta - \frac{1}{\alpha} = 1$ sein wird, woraus die wunderbare Übereinstimmung der beiden Formeln hervortritt.
Aus diesen Beispielen sieht man ein, dass die oben gefundene allgemeine Gleichung auf diese Weise faktorisiert dargestellt werden kann

$$\frac{(2b+c(x+y))(a(x+y)+2bxy}{(a-cxy)^2}.$$

Abgesehen davon wird die Betrachtung dieser Formeln interessante Beobachtungen zutage fördern können.

§23 In der Tat kann jene gefundene Integralform

$$\frac{(2b+c(x+y))(a(x+y)+2bxy)}{(a-cxy)^2}=C$$

auf folgende Weise direkt in eine sehr einfache Form gebracht werden; wenn wir nämlich ihre Faktoren

$$\frac{2b+c(x+y)}{a-cxy}=P \quad \text{und} \quad \frac{a(x+y)+2bxy}{a-cxy}=Q$$

setzen, dass $PQ=C$ sein muss, wird $aP-cQ=\frac{2ab-2bcxy}{a-cxy}=2b$ sein, woher

$$Q=\frac{aP-2b}{c}$$

wird, und so muss der konstanten Größe diese Form $\frac{aPP-2bP}{c}$ gleich werden; daher ist klar, dass auch die Größe P selbst eine Konstante gleich werden muss, sodass nun unsere Integralgleichung

$$\frac{2b+c(x+y)}{a-cxy}=C \quad \text{oder auch} \quad \frac{a(x+y)+2bxy}{a-cxy}=C$$

ist.

Eine andere sehr leichte Auflösung derselben Gleichung

$$\frac{dx}{a+2bx+cxx}+\frac{dy}{a+2by+cyy}=0$$

§24 Nach sorgfältiger Betrachtung der letzten Reduktion habe ich in Erfahrung gebracht, dass von Anfang an zu einfachsten Form des Integrals gelangt werden kann und es sogar nicht notwendig ist, zu den zweiten Differentialen aufzusteigen. Wenn wir nämlich wie zuvor $x + y = p$, $x - y = q$ und $xy = u$ setzen, leiten wir aus den Formeln

$$\frac{dx}{dt} = X \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = -Y$$

sofort $\frac{dp}{dt} = X - Y = 2bq + cpq$ ab, woher

$$\frac{dp}{2b + cp} = qdt$$

wird.

§25 Weiter wird aber

$$\frac{ydx + xdy}{dt} = \frac{du}{dt} = yX - xY = -aq + cqu$$

sein, woher $\frac{du}{cu-a} = qdt$ wird, weswegen wir daher sofort diese Gleichung $\frac{dp}{2b+cp} = \frac{du}{cu-a}$ berechnen, deren Integration $\log(2b + cp) = \log(cu - a) + \log C$ liefert; daher leitet man diese algebraische Gleichung ab $\frac{2b+cp}{cu-a} = C$, welche nach Wiedereinsetzen der Buchstaben x und y $\frac{2b+c(x+y)}{cxy-a} = C$ gibt, welche die einfachste Form der gesuchten Integralgleichung ist. Hier taucht das bemerkenswerte Phänomen auf, dass der erste Fall sich auf diese Weise nicht auflösen lässt.

§26 In der Tat werden aus der gefundenen Integralform leicht andere abgeleitet; wie wenn wir beispielsweise $\frac{2b}{a}$ addieren, wird diese Form entspringen $\frac{a(x+y)+2bxy}{cxy-a} = C$ entspringen, welche durch die vorgehende geteilt wiederum eine neue Form gibt, nämlich $\frac{2b+c(x+y)}{a(x+y)+2bxy} = C$; wie diese Formen Genüge leisten, wird der Mühe wert sein es gezeigt zu haben. Und die letzte Form, differenziert, wird freilich

$$\frac{-2ab(dx + dy) - 4bb(ydx + xdy) - 2bc(yydx + xxdy)}{(a(x + y) + 2bxy)^2}$$

sein, welche geordnet

$$dx(2ab + 4bby + 2bcyy) + dy(2ab + 4bbx + 2bcxx) = 0$$

gibt. Diese gibt durch $2b$ geteilt und separiert

$$\frac{dx}{a + 2bx + cxx} + \frac{dy}{a + 2by + cyy} = 0,$$

welche die vorlegte selbst ist.

Analysis für die Integration der Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cxx}} = \frac{dy}{\sqrt{A + By + Cyy}}$$

§27 Nachdem das neue, im Folgenden als konstant zu betrachtende, Element dt eingeführt worden ist, entspringen diese zwei Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{X} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = \sqrt{Y},$$

wo wir den Buchstaben X und Y die anfangs gegebenen Werte zuteilen wollen. Wir werden aber sehen, dass für die Methode, die wir hier benutzen werden, die mit den Buchstaben D und E behafteten Terme weggelassen werden müssen. Nach Quadrieren wird also

$$\frac{dx^2}{dt^2} = X \quad \text{und} \quad \frac{dy^2}{dt^2} = Y$$

sein.

§28 Nun wollen wir diese Formeln differenzieren und nachdem wie üblich $dX = X'dx$ und $dY = Y'dy$ gesetzt worden ist, werden wir diese Gleichungen erhalten

$$\frac{2ddx}{dt^2} = X' \quad \text{und} \quad \frac{2ddy}{dt^2} = Y'$$

und für $x + y = p$ gesetzt wird $\frac{2ddp}{dt^2} = X' + Y'$ werden. Weil nun

$$X' = B + 2Cx + 3Dxx + 4Ex^3 \quad \text{und} \quad Y' = B + 2Cy + 3Dyy + 4Ey^3$$

ist, wird

$$X' + Y' = 2B + 2Cp + 3D(xx + yy) + 4E(x^3 + y^3) = \frac{2ddp}{dt^2}$$

sein, welche Gleichung natürlich eine Integration zulassen wird, wenn $D = 0$ und $E = 0$ war, so wie wir angenommen haben. Durch Multiplikation mit dp und Integrieren erhalten wir daher

$$\frac{dp^2}{dt^2} = \Delta + 2Bp + Cpp$$

und nach Ziehen der Wurzel

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{A + 2Bp + Cpp}.$$

Weil also $\frac{dp}{dt} = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$ ist, wird die Integralgleichung, die wir erlangt haben,

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{\Delta + 2B(x+y) + C(x+y)^2}$$

sein, welche also algebraisch ist; dort bemerke man, dass

$$X = A + Bx + Cxx \quad \text{und} \quad Y = A + By + Cyy$$

ist.

§29 Wir wollen also die Quadrate nehmen und unsere Integralgleichung wird

$$2A + B(x+y) + C(x^2 + y^2) + 2\sqrt{XY} = \Delta + 2B(x+y) + C(x+y)^2$$

oder

$$2A - B(x+y) - 2Cxy + 2\sqrt{XY} = \Delta$$

sein, welche rational gemacht und für $\Delta - 2A = \Gamma$ gesetzt

$$4XY = 4AA + 4AB(x+y) + 4AC(xx+yy) + 4BBxy + 4BCxy(x+y)$$

$$+4CCxxyy = \Gamma^2 + 2\Gamma B(x+y) + 4\Gamma Cxy + BB(x+y)^2 + 4BCxy(x+y) + 4CCxxyy$$

oder

$$(4AA - \Gamma^2) + 2B(2A - \Gamma)(x+y) + 4(BB - \Gamma C)xy$$
$$+4AC(xx+yy) - B^2(x+y)^2 = 0$$

liefern wird.

§30 Wenn wir also diese rationale Gleichung mit der *kanonischen* Formel, die ich einst benutzt habe um Integrationen dieser Art durchzuführen, vergleichen, welche

$$\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy = 0$$

war, werden wir, wenn wir anstelle von $(x+y)^2$ $(xx+yy)+2xy$ schreiben

$$\alpha = 4AA - \Gamma^2, \quad \beta = B(2A - \Gamma), \quad \gamma = 4AC - B^2, \quad \delta = BB - 2\Gamma C$$

finden.

§31 Wir werden darüber hinaus dieselbe vorgelegte Differentialgleichung auf eine andere Weise integrieren können, indem wir den Buchstaben $q = x - y$ einführen; denn wir werden

$$\frac{2ddq}{dt^2} = X' - Y'$$

haben. Aber es wird

$$X' - Y' = 2Cq + 3Dq(x+y) + 4Eq(xx+xy+yy)$$

sein, wo wiederum klar ist, dass so $D = 0$ wie $E = 0$ gesetzt werden muss, damit die Integration durch Multiplikation mit dq gelingt. Nachdem dies aber bemerkt worden ist, wird das Integral

$$\frac{dq^2}{dt^2} = \text{Konst.} + Cqq \quad \text{und daher} \quad \frac{dq}{dt} = \sqrt{\Delta + Cqq}$$

sein.

§32 Weil also $\frac{dq}{dt} = \sqrt{X} - \sqrt{Y}$ ist, wird dieses Integral so ausgedrückt sein

$$\sqrt{X} - \sqrt{Y} = \sqrt{\Delta + Cqq},$$

welche Gleichung nach Nehmen der Quadrate in diese

$$2A + B(x+y) + C(xx+yy) - 2\sqrt{XY} = \Delta + C(x-y)^2$$

oder

$$2A + B(x+y) + 2Cxy - 2\sqrt{XY} = \Delta$$

übergeht, woher

$$2\sqrt{XY} = 2A - \Delta + B(x+y) + 2Cxy$$

wird, wenn wo $2A - \Delta = -\Gamma$ gesetzt wird, die Gleichung von der zuvor gefundenen in keinster Weise abweicht.

§33 Wenn aber diese Gleichung vorgelegt wäre

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cxx}} + \frac{dy}{\sqrt{A+By+Cyy}} = 0,$$

werden die zuvor gefundenen Integrale auf diesen Fall bezogen, wenn nur anstelle von $\sqrt{Y}$ hier $-\sqrt{Y}$ geschrieben wird; daher ist es klar, dass man für diesen Fall diese Gleichung hat

$$\sqrt{X} - \sqrt{Y} = \sqrt{\Delta + 2B(x+y) + C(x+y)^2}$$

oder auch

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{\Delta + C(x-y)^2}.$$

§34 Hier taucht ein Sonderfall auf, wannimmer die Formeln $A + Bx + Cxx$ Quadrate sind. Es sei nämlich

$$X = (a+bx)^2 \quad \text{und} \quad Y = (a+by)^2$$

und daher

$$A = aa, \quad B = 2ab, \quad C = bb;$$

denn dann wird die erste Integralform

$$b(x-y)=\sqrt{\Delta+4ab(x+y)+bb(x+y)^2}$$

sein und nach Nehmen der Quadrate

$$-4bbxy=\Delta+4ab(x+y)$$

und daher

$$\Delta=a(x+y)+bxy,$$

das Differential welcher Gleichung

$$a(dx+dy)+b(xdy+ydx)=0 \quad \text{und daher} \quad dx(a+by)+dy(a+bx)=0$$

ist. Wenn aber die andere Formel benutzt wird, wird

$$2a+b(x+y)=\sqrt{\Delta+bb(x-y)^2}$$

sein, woher nach Nehmen der Quadrate und nach Setzen von $\Delta-4aa=\Gamma$ wie zuvor

$$\Gamma=a(x+y)+bxy$$

hervorgeht.

ANALYSIS FÜR DAS INTEGRIEREN DER GLEICHUNG $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ MIT $X=A+Bx+Cxx+Dx^3+Ex^3$ UND $Y=A+By+Cyy+Dy^3+Ey^4$

§35 Nachdem wiederum das Element dt eingeführt worden ist, sodass

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{X} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt}=\sqrt{Y}$$

und daher nach Nehmen der Quadrate

$$\frac{dx^2}{dt^2} = X \quad \text{und} \quad \frac{dy^2}{dt^2} = Y$$

ist, wollen wir $x + y = p$ und $x - y = q$ setzen, und weil daher

$$dx^2 - dy^2 = dpdq$$

hervorgeht, wird

$$\frac{dpdq}{dt^2} = X - Y = B(x-y) + C(x^2 - y^2) + D(x^3 - y^3) + E(x^4 - y^4)$$

sein.

§36 Weil also $x = \frac{p+q}{2}$ und $y = \frac{p-q}{2}$ ist, wird man nach Einführen dieser Werte

$$X - Y = Bq + Cpq + \frac{1}{4}Dq(3pp + qq) + \frac{1}{2}Epq(pp + qq)$$

finden, woher nach Teilen durch q

$$\frac{dpdq}{qdt^2} = B + Cp + \frac{1}{4}D(3pp + qq) + \frac{1}{2}Ep(pp + qq)$$

entspringt.

§37 Nun wollen wir auch die zuerst dargebotenen quadratischen Formeln differenzieren und, indem wir wie zuvor

$$dX = X'dx \quad \text{und} \quad dY = Y'dy$$

setzen, werden wir

$$\frac{2ddx}{dt^2} = X' \quad \text{und} \quad \frac{2ddy}{dt^2} = Y'$$

haben und daher durch Addieren

$$\frac{2ddp}{dt^2} = X' + Y'.$$

Weil aber

$$X' = B + 2Cx + 3Dxx + 4Ex^3 \quad \text{und} \quad Y' = B + 2Cy + 3Dyy + 4Ey^3$$

ist, wird

$$X' + Y' = 2B + 2Cp + \frac{3}{2}D(pp + qq) + Ep(pp + 3qq)$$

sein, sodass nach Einsetzen dieses Wertes

$$\frac{ddp}{dt^2} = B + Cp + \frac{3}{4}D(pp + qq) + \frac{1}{2}Ep(pp + 3qq)$$

wird; wenn wir von dieser Gleichung die erste für $\frac{dpdq}{qdt^2}$ abziehen, wird die folgende zurückbleiben

$$\frac{ddp}{dt^2} - \frac{dpdq}{qdt^2} = \frac{1}{2}Dqq + Epqq.$$

§38 Nun erzeugt diese Gleichung durch qq geteilt diese

$$\frac{1}{dt^2}\left(\frac{ddp}{qq} - \frac{dpdq}{q^3}\right) = \frac{1}{2}D + Ep,$$

welche mit $2dp$ multipliziert integrierbar wird; es geht nämlich

$$\frac{dp^2}{qqdt^2} = \Delta + Dp + Epp$$

hervor, nach Ziehen der Wurzel aus welcher man

$$\frac{dp}{qdt} = \sqrt{\Delta + Dp + Epp}$$

ableitet. Weil wir also $p = x + y$ und $q = x - y$ gesetzt haben, wird

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$$

sein, woher diese algebraische Integralgleichung resultiert

$$\frac{\sqrt{X} + \sqrt{Y}}{x - y} = \sqrt{\Delta + D(x + y) + E(x + y)^2},$$

welche die vom illustren LAGRANGE gefundene Form ist.

§39 Wir wollen diese Form weiter entwickeln und nach Nehmen der Quadrate wird

$$\frac{X+Y+2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Delta + D(x+y) + E(x+y)^2$$

sein. Es ist aber

$$X+Y = 2A + B(x+y) + C(xx+yy) + D(x^3+y^3) + E(x^4+y^4);$$

wenn wir davon

$$(D(x+y) + E(x+y)^2)(x-y)^2$$

abziehen, wird

$$2A + B(x+y) + C(x^2+y^2) + Dxy(x+y) + 2Exxyy$$

zurückbleiben, nach Einsetzen welches Ausdrucks die Integralgleichung

$$\frac{2A + B(x+y) + C(x^2+y^2) + Dxy(x+y) + 2Ex^2y^2 + 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Delta$$

sein wird.

§40 Diese Gleichung kann ein wenig gefälliger gemacht werden, indem man auf beiden Seiten C subtrahiert und $\Delta - C = \Gamma$ setzt; danach wird man nämlich

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy + 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Gamma$$

haben, woher wir

$$2\sqrt{XY} = \Gamma(x-y)^2 - 2A - B(x+y) - 2Cxy - Dxy(x+y) - 2Exxyy$$

ableiten, oder durch Setzen von

$$2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy = V$$

wird unsere Gleichung

$$2\sqrt{XY} = \Gamma(x-y)^2 - V$$

sein, welche nach Nehmen von Quadraten in diese

$$4XY = \Gamma^2(x-y)^4 - 2\Gamma V(x-y)^2 + VV$$

oder

$$4XY - VV = \Gamma^2(x-y)^4 - 2\Gamma V(x-y)^2$$

übergeht.

§41 Nach dieser Einsetzung wird

$$\begin{gathered} 4XY = 4A^2 + 4AB(x+y) + 4AC(xx+yy) + 4AD(x^3+y^3) + 4AE(x^4+y^4) \\ +4BBxy + 4BCxy(x+y) + 4BDxy(xx+yy) + 4BExy(x^3+y^3) \\ +4CCxxyy + 4CDxxyy(x+y) + 4CExxyy(xx+yy) \\ +4DDx^3y^3 + 4DEx^3y^3(x+y) + 4EEx^4y^4 \end{gathered}$$

sein. Weiter berechnet man aber, dass

$$\begin{gathered} VV = 4AA + 4AB(x+y) + 8ACxy + 4ADxy(x+y) + 8AExxyy \\ +BB(x+y)^2 + 4BCxy(x+y) + 2BDxy(x+y)^2 + 4BE(x+y)xxyy \\ +4CCxxyy + 4CD(x+y)xxyy + 8CEx^3y^3 \\ +DDxxyy(x+y)^2 + 4DEx^3y^3(x+y) + 4EEx^4y^4 \end{gathered}$$

sein wird.

§42 Wenn wir nun die letzte Formel von der ersten abziehen und die einzelnen Term entsprechend ordnen, werden wir

$$\begin{gathered} 4XY - VV = 4AC(x-y)^2 + 4AD(x+y)(x-y)^2 \\ +4AE(x+y)^2(x-y)^2 - B^2(x-y)^2 + 2BDxy(x-y)^2 + 4BExy(x+y)(x-y)^2 \\ +4CExxyy(x-y)^2 - DDxxyy(x-y)^2 \end{gathered}$$

haben, welcher Ausdruck den gemeinsamen Faktor $(x-y)^2$ hat; wenn wir also durch ihn teilen, werden wir zu dieser gefälligeren Gleichung gelangen

$$\begin{gathered} 4AC + 4AD(x+y) + 4AE(x+y)^2 \\ -BB + 2BDxy + 4BExy(x+y) + (4CE-DD)xxyy \\ = \Gamma\Gamma(x-y)^2 - 4\Gamma A - 2\Gamma B(x+y) - 4\Gamma Cxy - 2\Gamma Dxy(x+y) - 4\Gamma Exxyy. \end{gathered}$$

§43 Wir wollen nun alle Terme auf die linke Seite bringen und anstelle von $(x+y)^2$ $(xx+yy)+2xy$ schreiben, dann aber $(xx+yy)-2xy$ anstelle von $(x-y)^2$, wonach eine solche meiner kanonischen entsprechende Gleichung entspringt

$$0 = \left\{ \begin{array}{llll} 4AC + 4AD(x+y) & + 4AE(x^2+y^2) & + 2BDxy + 4BExy(x+y) & + 4CExxyy \\ -BB + 2\Gamma B(x+y) & - \Gamma\Gamma(x^2+y^2) & + 8AExy + 2\Gamma Dxy(x+y) & - DDxxyy \\ +4\Gamma A & & + 2\Gamma^2 xy & + 4\Gamma Exxyy \\ & & + 4\Gamma Cxy & \end{array} \right.$$

§44 Daher werden also für die kanonische Gleichung die griechischen Buchstaben α, β, γ, δ etc. durch die lateinischen A, B, C, D, E zusammen mit der konstante Γ auf folgende Weise bestimmt

$$\alpha = 4AC + 4\Gamma A - BB$$
$$\beta = 2AD + \Gamma B$$
$$\gamma = 4AE - \Gamma\Gamma$$
$$\delta = BD + 4AE + \Gamma^2 + 2\Gamma C$$
$$\varepsilon = 2BE + \Gamma D$$
$$\zeta = 4CE + 4\Gamma E - DD,$$

sodass die kanonische Gleichung, die ich einst gebraucht habe,

$$\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta xxyy = 0$$

ist.

§45 Aber diese Integralgleichung erstreckt sich rational gemacht weiter als die vorgelegte Differentialgleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$; denn sie umfasst gleichzeitig auch das Integral von dieser $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$. Diese Gleichung hat natürlich zwei Faktoren, von welchen jeder von beiden einer der beiden Genüge leistet. Aus der Entstehung ist aber klar, dass diese Gleichung dass Produkt aus diesen Faktoren ist

$$\Delta(x-y)^2 - V + 2\sqrt{XY} \quad \text{und} \quad \Delta(x-y)^2 - V - 2\sqrt{XY}.$$

§46 Wir haben oben schon beobachtet, dass das Integral derselben Differentialgleichung auch auf diese Weise dargeboten werden kann

$$\frac{M\sqrt{Y} + N\sqrt{X}}{(x-y)^3} = C$$

(siehe § 8 und die vorherigen) mit

$$M = 4A + B(3x+y) + 2Cx(x+y) + Dxx(x+3y) + 4Ex^3y,$$
$$N = 4A + B(3y+x) + 2Cy(x+y) + Dyy(y+3x) + 4Exy^3,$$

wo es förderlich sein wird bemerkt zu haben, dass

$$M+N=8A+4B(x+y)+2C(x+y)^2+D(x+y)^3+4Exy(xx+yy),$$

$$\begin{aligned}M-N=2B(x-y)+2C(x+y)(x-y)+D(x-y)(x^2+4xy+y^2)\\ +4Exy(x+y)(x-y)\end{aligned}$$

ist. Dennoch wird nicht leicht eingesehen, wie diese Form mit der zuvor gefundenen übereinstimmt, obgleich wir über ihre Übereinstimmung sicher sein können.

§47 Aus diesen Dingen, die bisher erwähnt worden sind, ist hinreichend klar, dass dieselbe Integralgleichung auf unzählige Weisen dargeboten werden kann, je nachdem ob die beliebige Konstante auf die eine oder auf die andere Weise dargestellt wird; daher wir es sehr hilfreich sein ein bestimmtes Gesetz zu formulieren, nach welchem wir in einem bestimmten Fall die beliebige Konstante ausdrücken wollen. Zu diesem Zweck bemerke man diese Regeln, dass die Integrale immer so genommen werden, dass für $y=0$ gesetzt $x=k$ wird und daher nach dem Gesetz der Zusammensetzung $X=k$ mit

$$K=A+Bk+Ckk+Dk^3+Ek^4.$$

Denn nach Bemerken dieses Gesetzes werden alle Integrale, wie verschieden auch immer sie erscheinen mögen, zur vollkommenen Übereinstimmung gebracht werden können. Was wir auf diese Weise bisher gefunden haben, wollen wir in den folgenden Theoremen zusammenfassen.

Theorem 1

§48 *Wenn diese Differentialgleichung*

$$\frac{dx}{a+bx+cxx}-\frac{dy}{a+by+cyy}=0$$

so integriert wird, dass für $y=0$ gesetzt $x=k$ wird, wird sich das Integral so verhalten

$$\frac{2a+b(x+y)+2cxy}{x-y}=\frac{2a+bk}{k}.$$

THEOREM 2

§49 *Wenn diese Differentialgleichung*

$$\frac{dx}{a+bx+cxx}+\frac{dy}{a+by+cyy}=0$$

so integriert wird, dass für $y=0$ gesetzt $x=k$ wird, ist das Integral oben auf dreifache Weise gefunden worden; es wird nämlich gelten

$$\text{I.} \qquad \frac{b+c(x+y)}{cxy-a}=-\frac{b+ck}{a}$$

$$\text{II.} \qquad \frac{a(x+y)+bxy}{cxy-a}=-k,$$

$$\text{III.} \qquad \frac{b+c(x+y)}{a(x+y)+bxy}=\frac{b+ck}{ak}.$$

THEOREM 3

§50 *Wenn diese Differentialgleichung*

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cxx}}-\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cyy}}=0$$

so integriert wird, dass für $y=0$ gesetzt $x=k$ wird, wird das Integral

$$-B(x+y)-2Cxy+2\sqrt{A+Bx+Cxx}\sqrt{A+By+Cyy}$$
$$=-Bk+2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)}$$

oder

$$B(k-x-y)-2Cxy=2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)}$$
$$-2\sqrt{A+Bx+Cxx}\sqrt{A+By+Cyy}$$

sein.

KOROLLAR

§51 Daher ist also klar, wenn die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cxx}}+\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cyy}}=0$$

vorgelegt war und so integriert wird, dass für $y=0$ gesetzt $x=k$ wird, dass das Integral

$$\begin{aligned} &B(k-x-y)-2Cxy \\ =\ &2\sqrt{A+Bx+Cxx}\sqrt{A+By+Cyy}-2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)} \end{aligned}$$

sein wird.

THEOREM 4

§52 *Wenn der Kürze wegen*

$$\begin{aligned} X &= A+Bx+Cxx+Dx^3+Ex^4, \\ Y &= A+By+Cyy+Dy^3+Ey^4, \\ Z &= A+Bk+Ckk+Dk^3+Ek^4 \end{aligned}$$

gesetzt wird diese Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}-\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0$$

vorgelegt wird, die so integriert werden muss, dass für $y=0$ gesetzt $x=k$ wird, wird ihr Integral so ausgedrückt sein

$$\frac{2A+B(x+y)+2Cxy+Dxy(x+y)+2Exxyy+2\sqrt{XY}}{(x-y)^2}=\frac{2A+Bk+2\sqrt{AK}}{kk}.$$

Wenn die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0$$

vorgelegt war, wird ihr Integral

$$\frac{2A+B(x+y)+2Cxy+Dxy(x+y)+2Exxyy-2\sqrt{XY}}{(x-y)^2}=\frac{2A+Bk-2\sqrt{AK}}{kk}$$

sein.

Korollar 1

§53 Wenn wir also hier $D=0$ und $E=0$ setzen, entspringt der Fall des dritten Theorems für die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cxx}}-\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cyy}}=0,$$

deren Integral also daher

$$\frac{2A+B(x+y)+2Cxy+2\sqrt{(A+Bx+Cxx)(A+By+Cyy)}}{(x-y)^2}$$
$$=\frac{2A+Bk+2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)}}{kk}$$

sein wird; wenn diese Form mit der oberen verglichen wird, werden die irrationalen Formeln beseitigt werden können. Denn weil ja aus der ersten

$$2\sqrt{XY}=2\sqrt{A(A+Bk-Ckk)}-B(k-x-y)+2Cxy$$

ist, wird das letzte Integral

$$\frac{2A+B(2x+2y-k)+4Cxy+2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)}}{(x-y)^2}=\frac{2A+Bk+2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)}}{kk}$$

sein, woher sofort die kanonische Gleichung

$$\alpha+2\beta(x+y)+\gamma(xx+yy)+2\delta xy=0$$

abgeleitet wird.

Korollar 2

§54 Wir wollen nun festlegen, dass $A = 0$ und $B = 0$ ist, sodass

$$X = xx(C + Dx + Exx) \quad \text{und} \quad Y = yy(C + Dy + Eyy) \quad \text{und} \quad K = kk(C + Dk + Ekk)$$

ist; die zu integrierende Differentialgleichung wird

$$\frac{dx}{x\sqrt{C + Dx + Exx}} - \frac{dy}{y\sqrt{C + Dy + Eyy}} = 0$$

werden, deren Integral also

$$\frac{xy(2C + D(x + y) + 2Exy) + 2xy\sqrt{(C + Dx + Exx)(C + Dy + Eyy)}}{(x - y)^2} = \Delta$$

sein wird; und hier lässt sich die Konstante Δ nicht durch k bestimmen; denn für $y = 0$ verwickelt sie eine Unannehmlichkeit. Dennoch ist auch diese Integration höchst bemerkenswert.

Korollar 3

§55 Wenn wir aber in dieser letzten Integration anstelle von x und y $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ schreiben, wird zuerst die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{Cyy + Dy + E}} - \frac{dx}{\sqrt{Cxx + Dx + E}} = 0$$

sein; dann wird aber das Integral die folgende Form annehmen

$$\frac{2Cx + D(x + y) + 2E + 2\sqrt{(Cxx + Dx + E)(Cyy + Dy + E)}}{(y - x)^2}$$

$$= \Delta = \frac{Dk + 2E + 2\sqrt{E(Ckk + Dk + E)}}{kk}.$$

Wenn wir also hier anstelle dieser Buchstaben E, D, C hier A, B, C schreiben, wird die oben behandelte Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cxx}} - \frac{dy}{\sqrt{A + By + Cyy}} = 0$$

hervorgehen, deren Integral also

$$\frac{2A+B(x+y)+2Cxy+2\sqrt{(A+Bx+Cxx)(A+By+Cyy)}}{(x-y)^2}$$
$$=\frac{Bk+2A+2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)}}{kk}$$

sein wird, welche hervorragend mit der in Korollar 1 angegebenen übereinstimmt.

KOROLLAR 4

§56 Wir wollen nun auch den Fall betrachten, in dem die Formel

$$A+Bx+Cxx+Dx^3+Ex^4$$

ein Quadrat wird, welches $(a+bx+cxx)^2$ sei, sodass wir nun

$$A=aa,\quad B=2ab,\quad C=bb+2ac,\quad D=2bc,\quad E=cc,$$

dann aber

$$\sqrt{X}=a+bx+cxx,\quad \sqrt{Y}=a+by+cyy,\quad \sqrt{K}=a+bk+ckk$$

und die Differentialgleichung für den ersten Fall wird

$$\frac{dx}{a+bx+cxx}-\frac{dy}{a+by+cyy}=0$$

sein, deren Integral also

$$\left\{\begin{matrix} 2aa+2ab(x+y)+2(bb+2ac)xy+2bcxy(x+y) \\ +2ccxxyy+2(a+bx+cxx)(a+by+cyy) \end{matrix}\right\}:(x-y)^2=\Delta$$

sein wird, welche zu

$$\frac{aa+ab(x+y)+(bb+2ac)xy+bcxy(x+y)+ccxxyy}{(x-y)^2}=\frac{aa+abk}{kk}$$

reduziert wird. Wenn wir also auf beiden Seiten $\frac{1}{4}bb$ addieren, wird

$$\frac{\left(a+\frac{1}{2}b(x+y)+cxy\right)^2}{(x-y)^2}=\frac{\left(a+\frac{1}{2}bk\right)^2}{k^2}$$

hervorgehen, woher nach Ziehen der Wurzel die im ersten Theorem angegebene Integralform erhalten wird.

§57 Wenn wir aber auf diese Weise den anderen Fall der Gleichung

$$\frac{dx}{a+bx+cxx}+\frac{dy}{a+by+cyy}=0$$

entwickeln wollen, gelangen wir zu dieser Gleichung

$$\begin{gathered}\frac{2aa+2ab(x+y)+2(bb+2ac)xy+2bcxy(x+y)+2ccxxyy}{(x-y)^2}\\ -\frac{2(a+bx+cxx)(a+by+cyy)}{(x-y)^2}=\Delta,\end{gathered}$$

welche entwickelt $\Delta=-2ac$ gibt, und diese Gleichung ist natürlich absurd und zeigt nichts über das gesuchte Integral, die Begründung welches Umstandes untersucht zu haben von größter Bedeutung sein wird.

Ein bemerkenswertes Paradoxon

§58 *Weil das Integral dieser Differentialgleichung*

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0$$

im Allgemeinen als

$$\frac{2A+B(x+y)+2Cxy+Dxy(x+y)+2Exxyy-2\sqrt{XY}}{(x-y)^2}=\Delta$$

gefunden worden ist, aber in dem Fall, in dem

$$\sqrt{X}=a+bx+cxx \quad \textit{und} \quad \sqrt{Y}=a+by+cyy$$

gesetzt wird, daraus eine absurde Gleichung entsteht, wird eine Erklärung dieser großen Schwierigkeit und besonders eine Methode daher den wahren Wert es Integrals zu finden gesucht.

ENTWIRRUNG DES PARADOXONS

§59 Wie natürlich in der Analysis Formeln solcher Art aufzutauchen pflegen, die in gewissen Fällen unbestimmt und sogar gar nichts zu bedeuten scheinen, so geschieht hier Ähnliches, aber auf ganz andere Weise, weil man weder zu einem Brüchen, dessen Zähler und Nenner gleichzeitig verschwinden, noch zu einer Differenz zwischen zwei Unendlichen gelangt, welches Beispiel umso mehr bemerkenswert ist, weil ich mich nicht erinnere jemals einen ähnlichen Fall gesehen zu haben. Dieses einzigartige Phänomen ergibt sich freilich, wannimmer die beiden Formeln X und Y Quadrate sind, um welches aufzulösen auf einen ähnlichen Kunstgriff zurückgegriffen werden muss, gemäß welchem die Formeln X und Y nicht Quadraten gleich, sondern als unendlich wenig von ihnen abzuweichen angenommen werden.

§60 Wir wollen also

$$X = (a + bx + cxx)^2 + \alpha \quad \text{und} \quad Y = (a + by + cyy)^2 + \alpha$$

setzen, sodass für die Großbuchstaben A, B, C, D, E $A = aa + \alpha$, $B = 2ab$, $C = 2ac + bb$, $D = 2bc$, $E = cc$ wird, wo α eine unendlich kleine später gleich Null zu setzende Größe bedeutet. Wenn wir daher also der Kürze wegen

$$a + bx + cxx = R \quad \text{und} \quad a + by + cyy = S$$

setzen, wird

$$\sqrt{X} = R + \frac{\alpha}{2R} \quad \text{und} \quad \sqrt{Y} = S + \frac{\alpha}{2S}$$

sein.

§61 Nun wollen wir also die zuerst gefundene Form die Integrals betrachten, welche

$$\frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{x - y} = \sqrt{\Delta + D(x + y) + E(x + y)^2}$$

war, für welche wir also

$$\sqrt{X} - \sqrt{Y} = R - S - \frac{\alpha(R - S)}{2RS}$$

haben werden. Weil also hier $R - S = b(x-y) + c(xx - yy)$ sein wird, wird

$$\frac{R-S}{x-y} = b + c(x+y)$$

sein. Aber nachdem der Kürze wegen $x + y = p$ gesetzt worden ist, wird

$$\frac{R-S}{x-y} = b + cp$$

sein, woher unsere Gleichung

$$b + cp - \frac{\alpha(b+cp)}{2RS} = \sqrt{\Delta + 2bcp + ccpp}$$

sein wird.

§62 Nun nehme man auf beiden Seiten die Quadrate und unsere Gleichung wird die folgende Form annehmen $bb - \frac{\alpha}{RS}(b+cp)^2 = \Delta$. Natürlich werden die höheren Potenzen von α hier überall weggelassen. Hier tritt also der Grund unseres Paradoxons klar vor Augen, weil für $\alpha = 0$ gesetzt $bb = \Delta$ entspringt; daher, damit Δ eine beliebige Konstante bleibt, ist es ersichtlich, dass die Differenz zwischen bb und Δ auch unendlich klein genommen werden muss; deswegen wollen wir $\Delta = bb - \alpha\Gamma$ setzen und man wird diese völlige bestimmte Gleichung erhalten $\frac{(b+cp)^2}{RS} = \Gamma$ oder

$$(b + c(x+y))^2 = \Gamma(a + bx + cxx)(a + by + cyy),$$

welche Form nicht unwesentlich von der oben gefundenen Formel abweicht.

§63 Diese Form ist freilich komplizierter als die in § 24 und den folgenden gefundenen Lösungen, aber mit dem folgenden Kunstgriff kann sie auf die einfachste Form gebracht werden. Weil dieser Bruch $\frac{RS}{(b+cp)^2}$ eine konstante Größe sein muss, sei er $= F$, dass $F(cp+b)^2 = RS$ sein muss, und wie wir hier $x + y = p$ gesetzt haben, wollen wir hier weiter $xy = u$ setzen und es wird

$$RS = aa + abp + ac(pp - 2u) + bbu + bcpu + ccuu$$

werden und die Gleichung wird nach Potenzen von p geordnet

$$F(cp+b)^2 = acpp + abp + bcpu + bbu + aa - 2acu + ccuu$$

sein; hier wollen wir, sofern möglich, auf beiden Seiten durch $cp+b$ teilen, und man wird

$$F(cp+b) = ap + bu + \frac{(a-cu)^2}{cp+b}$$

finden. Wir wollen nun weiter, sofern möglich, durch $cp+b$ teilen, und es wird

$$F = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \cdot \frac{a-cu}{cp+b} + \frac{(a-cu)^2}{(cp+b)^2}$$

werden.

§64 Wenn wir nach Finden dieser Form

$$\frac{a-cu}{cp+b} = V$$

setzen, wird

$$F = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}V + VV$$

sein. Weil also dieser Ausdruck einer konstanten Größe gleich werden muss, ist es ersichtlich, dass die Größe V selbst konstant sein muss, sodass nun unser Integral auf diese Form zurückgeführt worden ist

$$\frac{a-cu}{cp+b} = \frac{a-cxy}{c(x+y)+b} = \text{Konst.}$$

Wir wollen auf beiden Seiten $\frac{a}{b}$ setzen und es wird

$$\frac{cxy + a(x+y)}{b + c(x+y)} = \text{Konst.}$$

werden, welche Form durch die erste geteilt diese ergibt

$$\frac{a(x+y) + cxy}{cxy - a} = \text{Konst.},$$

welche Formen mit den oben dargebotenen übereinstimmen.

THEOREM 5

§65 *Wenn im Allgemeinen diese Bezeichnungsweise verwenden, dass*

$$Z = A + Bz + Czz + Dz^3 + Ez^4$$

ist, und der so genommene Wert dieser Integralformel $\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$*, dass sie für* $z = 0$ *verschwindet, mit dem Zeichen* $\Pi : z$ *notiert wird, dann ist, damit* $\Pi : k = \Pi : x \pm \Pi : y$ *ist, es notwendig, dass zwischen den Größen* k, x, y *diese Beziehung besteht*

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cx + Dxy(x+y) + 2Exxyy \mp 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \frac{2A + Bk \mp 2\sqrt{AK}}{kk},$$

die Begründung welcher aus den obigen Ausführungen offenkundig ist.

Weil nämlich k eine konstante Größe bezeichnet, wird

$$d.\Pi : x \pm d.\Pi : y = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dx}{\sqrt{Y}} = 0$$

sein, deren Integral wir gerade gesehen haben so ausgedrückt zu werden

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy \mp 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Delta.$$

Weil $\Pi : x \pm \Pi : y = \Pi : k$ ist, ist es offensichtlich, dass für $y = 0$ gesetzt $\Pi : x = \Pi : k$ und daher $x = k$ sein muss, woher die unbestimmte Konstante Δ auf vollkommen identische Weise bestimmt wird wie zuvor.

KOROLLAR 1

§66 Wenn die Form $\Pi : z$ einen der Abszisse oder Ordinate Z entsprechenden Bogen einer bestimmten Kurve bezeichnet, werden sich bei dieser Kurve alle Bogen auf dieselbe Weise miteinander vergleichen lassen, auf die Kreisbogen miteinander verglichen werden, weil ja nach Vorlegen zweier Bogen $\Pi : x$ und $\Pi : y$ der dritte Bogen $\Pi : k$, der entweder der Summe oder der Differenz der Bogen gleich ist, immer dargeboten werden können wird.

KOROLLAR 2

§67 Wenn in dieser Form $\Pi : k = \Pi : x + \Pi : y$ $y = x$ gesetzt wird, wird $\Pi : k = 2\Pi : x$ hervorgehen und so einen Bogen doppelt so groß wie der erste gefunden werden. Aber wenn wir in unserer Form $y = x$ setzen, verschwinden so der Zähler wie der Nenner. Um aber ihren wahren Wert zu finden, wollen wir die zuerst in § 38 gefundene Gleichung

$$\frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{x - y} = \sqrt{\Delta + D(x+y) + E(x+y)^2}$$

gebrauchen und auf der linken Seite werde nun y als Konstante betrachtet; x wollen wir aber einen unendlich weg davon abweichenden Wert zuteilen oder, was dasselbe ist, man setze anstelle des Zählers und des Nenners deren Differentiale nach x ein und auf diese Weise wird für den Fall $y = x$ die linke Seite $\frac{X'}{2\sqrt{X}}$, wo $X' = B + 2Cx + 3Dxx + 4Ex^3$ ist. Nun wird man also nach Quadrieren

$$\frac{X'X'}{4X} = \Delta + 2Dx + 4Exx$$

haben, mit $\Delta = \frac{2A+Bk-2\sqrt{AK}}{kk}$ wie zuvor.

KOROLLAR 3

§68 Ohne diese Umwege kann die Verdopplung des Bogens aus der anderen Form

$$\Pi : k = \Pi : x - \Pi : y$$

abgeleitet werden, indem man $y = k$ setzt, weil daher $\Pi : x = 2\Pi : k$ wird, für welchen Fall die Relation zwischen x und k mit dieser Gleichung ausgedrückt werden wird

$$\frac{2A + B(k+x) + 2Ckx + Dkx(k+x) + 2Ekkxx + 2\sqrt{KX}}{(x-k)^2} = \frac{2A + Bk + 2\sqrt{AK}}{kk}.$$

Es ist aber schnell klar, wie wir daher zur Verdreifachung, Vervierfachung und jede beliebige Vervielfachung von Bogen vorgegangen werden muss, welchen Gegenstand ich vor einiger Zeit genauer betrachtet habe.

THEOREM 6

§69 *Wenn in den oben gefundenen Formen so $B = 0$ wie $D = 0$ gesetzt wird, dass*

$$X = A + Cxx + Ex^4 \quad \textit{und} \quad Y = A + Cyy + Ey^4 \quad \textit{und} \quad K = A + Ckk + Ek^4$$

ist, wenn dann diese Gleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$ so integriert wird, dass für $y = 0$ gesetzt $x = k$ wird, dann wird die Integralgleichung

$$\frac{A + Cxy + Exxyy \mp \sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \frac{A \mp \sqrt{AK}}{kk}$$

sein.

KOROLLAR 1

§70 Hier verdient es bemerkt zu werden, dass dieser Fall noch auf eine andere Weise aus der allgemeinen Form abgeleitet werden kann; nämlich wenn $A = 0$ und $E = 0$ genommen wird, dann geht nämlich diese Differentialgleichung hervor

$$\frac{dx}{\sqrt{Bx + Cxx + Dx^3}} \pm \frac{dy}{\sqrt{By + Cyy + Dy^3}} = 0$$

hervor, deren Integral

$$\frac{B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) \mp 2\sqrt{(Bx + Cxx + Dx^3)(By + Cyy + Dy^3)}}{(x-y)^2} = \frac{Bk}{kk} = \frac{B}{k}$$

sein wird, wo der einfache Wert der Konstante völlig herausgeht. Nun wollen wir in diesen Formeln anstelle von x und y xx und yy schreiben, aber anstelle der Buchstaben B und D wollen wir A und E schreiben und die Differentialgleichung wird

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Cxx + Ex^4}} \pm \frac{dy}{\sqrt{A + Cyy + Ey^4}} = 0$$

werden, deren Integral also auch auf diese Weise ausgedrückt werden wird

$$\frac{A(xx+yy) + 2Cxxyy + Exxyy(xx+yy) \mp 2xy\sqrt{XY}}{(xx-yy)^2} = \frac{A}{kk}.$$

KOROLLAR 2

§71 Man siehe also, auf diese Art sind wir zu einer anderen nicht minder bemerkenswerten Form des Integrals als die erste gelangt und nun wird sogar durch deren Kombination die Wurzel $\sqrt{XY}$ eliminiert werden können, weil ja aus der letzten

$$\mp 2\sqrt{XY} = \frac{A(xx-yy)^2}{kkxy} - \frac{A(xx+yy)}{xy} - 2Cxy - Exy(xx+yy)$$

wird, welcher Wert in die erste eingesetzt zu dieser rationalen Gleichung führt

$$\begin{aligned} 2A + 2Cxy + 2Exxyy + \frac{A(xx-yy)^2}{kkxy} - \frac{A(xx+yy)}{xy} - 2Cxy - Exy(xx+yy) \\ = \frac{2A(x-y)^2}{kk} \mp \frac{2(x-y)^2\sqrt{AK}}{kk}, \end{aligned}$$

welche weiter vereinfacht und durch $(x-y)^2$ geteilt auf diese Form zurückgeführt wird

$$\frac{2A \mp 2\sqrt{AK}}{kk} = \frac{A(x+y)^2}{kkxy} - Exy - \frac{A}{xy}$$

oder auf diese

$$\frac{A}{kk}(xx+yy-kk) - Exxyy \pm \frac{2xy\sqrt{AK}}{kk} = 0,$$

welche hervorragend mit der kanonischen Gleichung übereinstimmt, die ich einst benutzt habe, nämlich

$$0 = \alpha + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy + \zeta xxyy,$$

weil ja

$$\alpha = -A, \quad \gamma = +\frac{A}{kk}, \quad 2\delta = \pm\frac{2\sqrt{AK}}{kk}, \quad \zeta = -E$$

ist.

Korollar 3

§72 Mit der letzten Methode, die wird hier benutzt haben, um die Gleichung zu integrieren, wird eine um vieles allgemeines Gleichung behandelt werden können, wo in den Wurzeln die Potenzen bis hin zur sechsten Dimension ansteigen. Denn wenn wir nur $A = 0$ setzen, dass die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{x(B+Cx+Dxx+Ex^3)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{y(B+Cy+Dyy+Ey^3)}} = 0$$

ist, ist ihr Integral

$$\frac{B(x+y)+2Cxy+Dxy(x+y)+2Exxyy}{(x-y)^2}$$
$$\mp \frac{2\sqrt{xy(B+Cx+Dxx+Ex^3)(B+Cy+Dyy+Ey^3)}}{(x-y)^2} = \frac{B}{k}.$$

Wenn wir nun hier anstelle von x und y xx und yy schreiben, wird die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{B+Cxx+Dx^4+Ex^6}} \pm \frac{dy}{\sqrt{B+Cyy+Dy^4+Ey^6}} = 0$$

werden, deren Integral also

$$\frac{B(xx+yy)+2Cxxyy+Dxxyy(xx+yy)+2Ex^4y^4}{(xx-yy)^2}$$
$$\mp \frac{2xy\sqrt{(B+Cxx+Dx^4+Ex^6)(B+Cyy+Dy^4+Ey^6)}}{(xx-yy)^2} = \frac{B}{kk}$$

sein wird. Nun wollen wir aber zeigen, wie mit der Methode des illustren Lagrange dasselbe Integral ermittelt werden kann.

Analysis
für die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

mit

$$X = B + Cxx + Dx^4 + Ex^6 \text{ UND } Y = B + Cyy + Dy^4 + Ey^6$$

§73 Für $\frac{dx}{\sqrt{X}} = dt$ gesetzt wird $\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \mp dt$ und daher nach Nehmen der Quadrate

$$\frac{dx^2}{dt^2} = X \quad \text{und} \quad \frac{dy^2}{dt^2} = Y$$

sein. Daraus bilde man diese Gleichungen

$$\frac{xxdx^2}{dt^2} = xxX \quad \text{und} \quad \frac{yydy^2}{dt^2} = yyY.$$

Nun führe man die zwei neuen Variablen p und q ein, dass

$$xx + yy = 2p \quad \text{und} \quad xx - yy = 2q$$

ist, woher

$$xdx + ydy = dp, \quad xdx - ydy = dq \quad \text{und daher} \quad xxdx^2 - yydy^2 = dpdq$$

wird; deshalb werden wir

$$\frac{dpdq}{dt^2} = xxX - yyY,$$

welche Gleichung durch $xx - yy = 2q$ geteilt werde, und es wird

$$\frac{dpdq}{2qdt^2} = \frac{xxX - yyY}{xx - yy}$$

hervorgehen, welche Form nach Einsetzen der Werte für X und Y

$$\frac{dpdq}{2qdt^2} = B + 2Cp + D(3pp + qq) + 4E(p^3 + pqq)$$

geben wird.

§74 Nun werden weiter die Gleichungen für $\frac{dx^2}{dt^2}$ und $\frac{dy^2}{dt^2}$ differenziert

$$\frac{2ddx}{dt^2} = X' \quad \text{und} \quad \frac{2ddy}{dt^2} = Y'$$

geben. Aus der ersten wird $\frac{2xddy}{dt^2} = xX'$, zu welcher man $\frac{2dx^2}{dt^2} = 2X$ addiere, dass

$$\frac{2(xddx + dx^2)}{dt^2} = \frac{2d.xdx}{dt^2} = xX' + 2X$$

hervorgeht, In gleicher Weise wird

$$\frac{2d.ydy}{dt^2} = yY' + 2Y$$

sein, welche Gleichungen zueinander addiert

$$\frac{2d.dp}{dt^2} = \frac{2ddp}{dt^2} = xX' + yY' + 2(X + Y)$$

geben werden. Aber nach Einsetzen dieser Werte und entsprechender Einsetzung der Buchstaben findet man

$$2X + 2Y = 4B + 4Cp + 4D(pp + qq) + 4Ep(pp + 3qq).$$

Darauf wird wegen

$$xX' = 2Cxx + 4Dx^4 + 6Ex^6 \quad \text{und} \quad yY' = 2Cyy + 4Dy^4 + 6Ey^6$$

auch

$$xX' + yY' = 4Cp + 8D(pp + qq) + 12Ep(pp + 3qq)$$

sein, aus deren Verbindung

$$\frac{2ddp}{dt^2} = 4B + 8Cp + 12D(pp + qq) + 16Ep(pp + 3qq)$$

wird.

§75 Von dieser Formel ziehe man die oben gefundene $\frac{dpdq}{2qdt^2}$ viermal ab und es wird

$$\frac{2ddp}{dt^2} - \frac{2dpdq}{qdt^2} = 8Dqq + 32Epqq$$

zurückbleiben. Nun multipliziere man beide Seite mit $\frac{dp}{qq}$ und es wird

$$\frac{1}{dt^2}\left(\frac{2dpddp}{qq}-\frac{2dp^2dq}{q^3}\right)=8Ddp+32Epdp$$

hervorgehen, deren Integral sich unmittelbar so ausgedrückt darstellt

$$\frac{dp^2}{qqdt^2}=4\Delta+8Dp+16Epp$$

und daher nach Ziehen der Wurzel

$$\frac{dp}{qdt}=2\sqrt{\Delta+2Dp+4Epp}.$$

§76 Weil nun

$$\frac{dp}{dt}=x\sqrt{X}\mp y\sqrt{Y}\quad\text{und}\quad 2q=xx-yy$$

ist, wird nach der Substitution diese Gleichung entspringen

$$\frac{x\sqrt{X}\mp y\sqrt{Y}}{xx-yy}=\sqrt{\Delta+D(xx+yy)+E(xx+yy)^2},$$

die nach Nehmen der Quadrate auf dieser Form zurückgeführt werden wird

$$\frac{xxX+yyY\mp 2xy\sqrt{XY}}{(xx-yy)^2}=\Delta+D(xx+yy)+E(xx+yy)^2.$$

Es ist aber

$$xxX+yyY=B(xx+yy)+C(x^4+y^4)+D(x^6+y^6)+E(x^8+y^8)$$

und daher wird man zu dieser Gleichung gelangen

$$\frac{B(xx+yy)+C(x^4+y^4)+Dxxyy(xx+yy)+2Ex^4y^4\mp 2xy\sqrt{XY}}{(xx-yy)^2}=\Delta.$$

§77 Wir wollen aber nun die Konstante Δ wie oben so nehmen, dass für $y = 0$ gesetzt

$$x = k \quad \text{und} \quad X = K = B + Ckk + Dk^4 + Ek^6$$

wird, und die Integralgleichung wird diese Form annehmen

$$\frac{B(xx+yy) + C(x^4+y^4) + Dxxyy(xx+yy) + 2Ex^4y^4 \mp 2xy\sqrt{XY}}{(xx-yy)^2} = \frac{B+Ckk}{kk},$$

welche ein wenig einfacher wird, wenn wir auf beiden Seiten C abziehen; es wird nämlich

$$\frac{B(xx+yy) + 2Cxxyy + Dxxyy(xx+yy) + 2Ex^4y^4 \mp 2xy\sqrt{XY}}{(x^2-y^2)^2} = \frac{B}{kk}$$

sein, welche hervorragend mit dem oben in § 72 gefundenen Integral übereinstimmt.

§78 Hier offenbart sich ein bemerkenswerter Fall, wenn $B = 0$ ist; dann wird sich aber die Differentialgleichung so verhalten

$$\frac{dx}{x\sqrt{C+Dxx+Ex^4}} \pm \frac{dy}{y\sqrt{C+Dyy+Ey^4}} = 0,$$

deren Integral also durch die Konstante Δ ausgedrückt

$$\frac{C(x^4+y^4) + Dxxyy(xx+yy) + 2Ex^4y^4 \mp 2xy\sqrt{XY}}{(xx-yy)^2} = \Delta$$

sein wird. In diesen Fall kann aber die Integration nicht so bestimmt werden, dass für $y = 0$ $x = k$ wird, weil das Integral des letzten Glieds in diesem Fall offenbar unendlich wird; deswegen wird es gefällig sein die Integration auf eine andere Weise zu bestimmen, wie beispielsweise dass für $y = b$ $x = a$ wird; dann wird diese Konstante aber

$$\Delta = \frac{C(a^4+b^4) + Da^2b^2(aa+bb) + 2Ea^4b^4 \mp 2ab\sqrt{AB}}{(aa-bb)^2}$$

sein, wobei

$$A = C + Daa + Ea^4 \quad \text{und} \quad B = C + Dbb + Eb^4$$

ist.

ZUSAMMENFASSUNG

§79 Wer den Vorgang der hier benutzten Analysis mit der Methode vergleichen will, die der illustre LAGRANGE in den Miscellan. Taur. Tom. IV gebraucht hat, wird leicht erkennen, dass sie um vieles leichter zum gewünschten Ziel führt und um vieles bequemer auf die einzelnen Fälle angewendet werden kann. Der höchst illustre Mann hatte aber die Formel $\frac{dt}{T}$ in die Rechnung eingeführt, an deren Stelle ich hier das einfache Element dt verwendet habe, und dann hat er die Größe T als Funktion der Buchstaben p und q betrachtet, welche Festlegung ziemlich schwierige Rechnungen verlangt, während sich mit unserer Methode dieselben Integration weit angenehmer finden ließen. Obwohl aber kein Zweifel besteht, dass die Art der Analysis einen riesigen Zuwachs verheißt, ist dennoch noch nicht klar, wie sie auf andere Integrationen außer den Fällen, die wir hier behandelt haben und welche ich einst aus der kanonischen Gleichung abgeleitet hatte, angewendet werden kann.